Musiktheorietheorie

Dozent
Georg Schröter

Mitschrift
Josia Pietsch

Version
git: 6596e34
kompiliert: 31. März 2022 13:23

Inhaltsverzeichnis

1 Übersicht

1.1 Was ist Musiktheorie?

Musik

- Melodien
- Harmonien
- Rhythmus
- Dynamik
- Instrumente
  - Klangfarbe
- Erzählungsstruktur

$$
\begin{tikzcd}
\text{Noten} \arrow[r] & \text{Instrumente} \arrow[d] \\
 & \text{Schall} \arrow[d] \\
\text{Empfindung} \arrow[uu, "\text{komponieren}"] & \text{Ohr} \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

Theorie

- Abstraktion
- Analyse
- Struktur/Erklärungen
- Modell
- generiert falsifizierbare Hypothesen

In der Mathematik:

- Axiome
- Folgerungen
- (Konventionen)

In den Naturwissenschaften:

Eine Theorie sollte auf einfachen Annahmen beruhen und daraus Vorhersagen über die Realität ermöglichen.

Musiktheorie Wunsch

- Allgemein gültige Theorie (erklärt alle Musikstücke)
- Empfindung erklären (siehe Abschnitt 1.1)
- Klassifikation von Musik
- Abgrenzung zu nicht-Musik
- Neue Musik generieren $\rightsquigarrow$ Hypothesentest

Realität

- Gültigkeit beschränkt auf westliche, europäische Musik, ausgewählter männlicher, weißer Künstler aus dem 16. - 20. Jh.
- Klassifikation funktioniert innerhalb des Gültigkeitsbereiches recht gut.
- Heuristiken
- Erklärung funktioniert nicht
- Hilfsmittel zum Generieren neuer Musik
- grenzt (mit Absicht![1]) gegenüber nicht-weißer Musik ab

1.2 Aspekte von Musiktheorie

Worüber trifft Musiktheorie Aussagen?

- Tonleitern (Auswahl aus dem Tonvorrat) - Axiom
- Tonart (Tonleiter mit Grundton) - Axiom
- Harmonie
  - Intervalle - Folgerung
  - Akkorde - Folgerung
    - Terzschichtungen - Konvention
  - Kadenzen - Folgerung?
  - Konsonanz, Dissonanz - Axiom
- Tonsatz, z.B. Generalbass - Folgerung
- Betonung - Konvention
- Rhythmus - Konvention
- Formlehre - Konvention
- Melodien / Stimmführung - Axiom

[1] Empfehlung: https://www.youtube.com/watch?v=Kr3quGh7pJA

- Modulation - Folgerung
- Instrumentation - Konvention
- Tonvorrat - Axiom
- Kammerton - Konvention
- Enharmonik - Folgerung
- Notation - Konvention

Question 0.1. Existieren Leittöne auch in anderen Musikrichtungen?

Stilmittel

- Vibrato
- Glissando
- Flageoletttöne
- Verzerrungen
- Verzierungen

Einige Aspekte werden in klassischer Musiktheorie nicht behandelt:

- Stimmungssysteme
- Rhythmus
- Dynamik
- Klangfarbe
- Raumzeit$^{\text{TM}}$

Wir wollen im Folgenden Musiktheorie aus Mathematik und möglichst einfachen Axiomen aufbauen.

Notation 0.2. Wir verwenden die angelsächsische Konvention, den Ton H (Ganzton über A) als B und den Ton B (Halbton über A) als $B\flat$ zu bezeichnen.

2 Intervalle

Definition 1 (Schall)**.** **Schall** ist eine Funktion f : Zeit $\to$ Druck bzw. f : Zeit $\to$ Luftbewegung

Definition 2 (Ton)**.** Ein **Ton** entspricht einer Schwingungsfrequenz.

Observe. *Die Funktion* $\sin(2\pi \cdot f \cdot t)$ *ist periodisch mit* T_0 *genau dann, wenn* $f = k \cdot \frac{1}{T_0}$ *für ein* $k \in \mathbb{Z}$.

Definition 3 (Lineares Modell der MTT)**.** Jede Funktion mit Periode T_0 kann als Summe von Funktionen der Form $a \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t), a \cdot \cos(2\pi \cdot f \cdot t)$, $f = k \cdot \frac{1}{T_0}, a \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$ dargestellt werden.

Für $k = 1$ ergibt sich die **Grundfrequenz** $\frac{2\pi}{T}$, für $k \geqslant 2$ reden wir von **Obertönen**.

Obertöne Saiteninstrument (Alle Obertöne), Flöte, Querflöte (Obertöne nur für $k \in 2\mathbb{N} + 1$)

Tabelle 1: Obertöne

k	Ton	Frequenz-verhältnis	Halb-töne	EDO12	Reine Intervalle (Cent)
1	C				
	↓ Oktave	2	10	$2,000$	1200
2	C				
	↓ Quinte	$\frac{3}{2}$	7	$1,4989$	702
3	G				
	↓ Quarte	$\frac{4}{3}$	5	$1,3348$	498
4	C				
	↓ gr. Terz	$\frac{5}{4}$	4	$1,2599$	386
5	E				
	↓ kl. Terz	$\frac{6}{5}$	3	$1,1892$	316
6	G				
	↓	$\frac{7}{6}$	3?		267
7	B ?				
	↓	$\frac{8}{7}$	2?		231
8	C				
	↓ gr. Sekunde	$\frac{9}{8}$	2	$1,1225$	204
9	D				
	↓ gr. Sekunde	$\frac{10}{9}$	2	$1,1225$	182
10	E				

Observe. $\frac{9}{8} = \frac{10}{9}$ *???*

Es ergeben sich außerdem:

Tabelle 2: Intervalle

Intervall	Verhältnis	Reines Intervall (Cent)
gr. Sexte	$\frac{5}{3}$	884
kl. Sexte	$\frac{8}{5}$	814
kl. Septime	$\frac{9}{5} \approx \frac{7}{4}$	$1018 \approx 969$
Tritonus	$\sqrt{2}$	

Remark 3.1. Es ergibt sich als Frequenzverhältnis (in Bezug auf C) für gis (über E) 25 : 16 und für as 8 : 5. Diese Töne sind hier also tatsächlich verschieden.

Remark 3.2. Auf der Violine spielt man häufig trotzdem das gis höher als das as.

Skizze: Versuch der Konstruktion eines Tonvorrates mit sauberen Intervallen

Buchempfehlung: R. Duffin - "How equal temperament ruined harmony - and why you should care".

Bild Flageoletttöne

Da das leider nicht genau aufgeht definieren wir als atomares Intervall:

Definition 4 (Halbton)**.** **Halbton** $:= 2^{\frac{1}{12}}$. Dieses Stimmungssystem nennt sich **EDO12** oder auch **12-TET**.

Dementsprechend ist ein Intervall mit n Halbtonschritten definiert als $2^{\frac{n}{12}}$.

Um kleinere Tonabstände beschreiben zu können definieren wir ferner:

Definition 5 (Cent)**.** **Cent** $:= 2^{\frac{1}{1200}}$

Remark 5.1. Ein Unterschied von $10ct.$ ist hörbar, im direkten Vergleich konnten wir im Kurs auch Unterschiede von $3ct.$ hören. https://sevish.com/scaleworkshop/

Definition 6 (Dur)**.** **Dur** bezeichnet sowohl eine Tonart, als auch den Akkord, der sich aus den Tönen der 1., 3. und 5. Stufe dieser Tonart ergibt.

TODO: C-Dur-Tonleiter

Ein Dur-Akkord besteht aus einer großen und einer kleinen Terz, d.h. die Töne haben Frequenzverhältnisse von $1, \frac{5}{4}, \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} = \frac{6}{4}$.

Definition 7 (Moll)**.** TODO: C-Moll-Tonleiter

Ein Moll-Akkord besteht aus einer kleinen und einer großen Terz, d.h. die Töne haben Frequenzverhältnisse von $1, \frac{6}{5}, \frac{3}{2}$.

Definition 8 (Septakkord)**.** Ein **Septakkord** fügt zusätzlich noch eine kleine Terz hinzu. Als Septime ergibt sich ein Frequenzverhältnis von $\frac{9}{5}$, $\frac{7}{4}$ oder $\frac{16}{9}$, je nachdem von wo aus der siebte Ton gesucht wird. Für Dur wirkt dabei $\frac{7}{4}$ (Septime zum Grundton) sinnvoller (?)[a], für Moll $\frac{9}{5}$.

[a] Unter der Annahme, dass der Dur-Dreiklang durch die Obertonreihe motiviert ist.

Problem. *Wir suchen ein **equal temperament** / eine **gleichstufige Stim-***

***mung**, die die wichtigsten Intervalle möglichst gut approximiert.*

Die "Wichtigkeit" eines Intervalls definieren wir dabei über die Größe des Nenners, d.h. die Intervalle sind in absteigender Wichtigkeit: Oktave, Quinte, Quarte, gr. Terz, ...

Falls sowohl Oktaven als auch Quinten übereinstimmen sollen, bräuchten wir $a, b \in \mathbb{N}_{>0}$, so dass $2^a = \left(\frac{3}{2}\right)^b$. Solche existieren offenbar nicht.

Reelle Lösungen existieren, mit $\frac{b}{a} = \frac{\log 2}{\log \frac{3}{2}}$. Mit Hilfe von **Kettenbrüchen** finden wir möglichst gute Näherungen.

Notation 8.1 (Kettenbruchzerlegung)**.** Wir schreiben $[a; b, c, d, \ldots]$, $a \in \mathbb{Z}, b, c, d, \ldots \in \mathbb{N}_+$ für

$$a + \cfrac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \ldots}}}$$

Eine Näherung ist besser, je größer die erste weggelassene Zahl ist. Näherungen sich abwechselnd obere und untere Schranken.

Example 9.

$$\sqrt{2} = [1; \overline{2}] = 1 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \ldots}}}}$$

da $\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)}$.

Als Näherung ergibt sich beispielsweise

$$[1; 2, 2, 2] = 1 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = \frac{17}{12} = 1{,}41\overline{6}$$

Die Kettenbruchentwicklung von $\frac{\log 2}{\log \frac{3}{2}}$ ist $[1; 1, 2, 2, 3, 1, 5, 2, 23, \ldots]$. Näherungen sind:

- $[1; 1] = 2$

  Für die Quinte ergibt sich $2^{\frac{1}{2}} \approx 1{,}4142\ldots$

- $[1; 1, 2] = \frac{5}{3}$ (ein Halbtonschritt Abweichung, Pentatonik)

  Quinte: $2^{\frac{5}{3}} \approx 1{,}5157\ldots$

  Die große Terz wird durch eine Quarte approximiert, $2^{\frac{2}{5}} = 1{,}319\ldots$

- $[1; 1, 2, 2] = \frac{12}{7}$ (EDO12),

  Quinte: $2^{\frac{7}{12}} \approx 1{,}49840\ldots$

  Gr. Terz: $2^{\frac{4}{12}} \approx 1{,}2599\ldots$

Kl. Septime: $2^{\frac{10}{12}} \approx 1,781\dots$

- $[1;1,2,2,3] = \frac{41}{24}$

  Quinte: $2^{\frac{24}{41}} \approx 1,50042\dots$

  Gr. Terz: $2^{\frac{13}{41}} \approx 1,2458\dots$

- $[1;1,2,2,3,1] = \frac{53}{31}$ Quinte: $2^{\frac{31}{53}} \approx 1,49994\dots$

  Gr. Terz: $2^{\frac{17}{53}} \approx 1,24898\dots$

  Kl. Septime: $2^{\frac{43}{53}} \approx 1,7548\dots$

- $[1;1,2,2,3,1,5] = \frac{306}{179}$

  Quinte: $2^{\frac{197}{306}} \approx 1,5000050\dots$

- $[1;1,2,2,3,1,5,2] = \frac{665}{389}$

Das optimiert zunächst nur Oktaven und Quinten. Da Quarten der Rest einer Quinte zur Oktave sind, werden diese ebenfalls gut approximiert.

Videos zu EDO53: https://www.youtube.com/watch?v=ILcgB_kOWzM, https://www.youtube.com/watch?v=T5OvAjzWF2Y, https://www.youtube.com/watch?v=xVZy9GUeMqY

Eine große Terz lässt sich durch Quinten erreichen, indem man 4 Quinten nach oben und 2 Oktaven nach unten geht. Als Frequenzverhältnis ergibt sich dann $\left(\frac{3}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{81}{64}$. Die Abweichung $\frac{81}{80}$ zum Frequenzverhältnis $\frac{5}{4}$ wird als **syntonisches Komma** bezeichnet $(21,5ct.)$. In EDO53 entspricht ein Tonschritt $(22,6ct.\ )$ in etwa dem syntonischen Komma.

Remark 9.1 (Bohlen-Pierce-Skala)**.** $3^{\frac{k}{13}}, k \in \mathbb{Z}$. Ein einzelner Schritt liegt zwischen einem Halbton und einem Ganzton. Faktor 3 und Faktor 5 werden gut approximiert, aber es gibt keine sinnvolle Oktaven.

"Ich will das jetzt nicht werten, aber ich würde es als experimentell bezeichnen."

Remark 9.2. In der Musik aller Kulturen findet sich das Konzept einer Oktave.

Question 9.3. Gibt es einen Grund dafür, dass rationale Intervalle gut klingen?

$$\text{Klang} \longleftrightarrow \text{Überlagerung von Frequenzen}$$

Tabelle 3: Fouriertransformation

	diskret	kontinuierlich
endliche Länge	DFT / FFT	Fourieranalyse (diskrete Frequenzen)
unendlich	braucht man nicht	Fouriertransformation

Erinnerung: Lineares Modell

Bild Dreiecksschwingung als Überlagerung von Frequenzen

$$\sin(\frac{2\pi}{T} \cdot t) - \frac{1}{3^2} \sin(3 \cdot \frac{2\pi}{T} t) + \frac{1}{5^2} \sin(5 \cdot \frac{2\pi}{T} t) - \dots$$

> **Question 9.4.** Ist die Phasenverschiebung der einzelnen Komponenten für den Klang relevant?

Bild Fouriertransformation

ausprobieren

[2]

Observe. *Wenn zwei Töne aus einem Intervall mit rationalem Verhältnis zusammen klingen, fallen viele der Frequenzen aus dem Obertonspektrum zusammen.*

Diskrete Fouriertransformation aus AlMa abschreiben

FFT

Bild dazu

Erklärungsversuch Bei Tönen, die nicht in einem rationalen Verhältnis stehen, werden Schwebungen im Obertonspektrum wahrgenommen und sorgen dafür, dass diese Intervalle nicht gut klingen. Die Erklärung ist falsch: Auch bei reinen Sinustönen klingen rationale Intervalle besser als andere, jedoch haben diese kein Obertonspektrum. Ferner sind die Schwebungen vermutlich nicht wahrnehmbar.

2.1 Nichtlineare Effekte

Erinnerung:

$$\begin{tikzcd}
\text{Noten} \arrow[r, "1"] & \text{Instrumente} \arrow[d, "2"] \\
 & \text{Schall} \arrow[d, "3"] \\
\text{Empfindung} \arrow[uu, "\text{komponieren}"] & \text{Ohr} \arrow[l, "4"]
\end{tikzcd}$$

(1) und (2) können wir mit digitaler Technik kontrollieren. Welche nichtlinearen Effekte können auftreten?

- Dämpfung / Anregung (2)
- Ohr (3)
- neuronale Prozesse (Aktivierungsfunktion in ML) (4)
- Instabilität (1)

[2] In Audacity kann man ein Frequenzspektrum unter Analyze → Plot Spectrum berechnen

Für die Erklärung der Wahrnehmung von rationalen Intervallen scheinen Dämpfung und Instabilität nicht wichtig zu sein, denn die Intervalle klingen auch für reine Sinustöne gut.

2.1.1 Ohr

Es gibt keinen Grund anzunehmen, dass das Ohr Schall linear wahrnimmt. Beispielsweise die Trichterform des Gehörganges sorgt für Verzerrung

Annahme: Die Nichtlinearität wirkt nur auf die Auslenkung zum aktuellen Zeitpunkt.

Sei Schall gegeben durch $a(t)$ und eine nichtlineare Verzerrung g.

Sei $a(t) = \sin(\alpha t) + \sin(\beta t)$.

Wir können g mit einer Taylorreihe approximieren[3].

Sei $g(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$. Es ergibt sich für den quadratischen Term:

$$\begin{aligned}(\sin \alpha t + \sin \beta t)^2 &= (\sin \alpha t)^2 + 2 \sin \alpha t \sin \beta t + (\sin \beta t)^2 \\ &\overset{?}{=} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\alpha t + \cos(\alpha t - \beta t) \cos(\alpha t + \beta t) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\beta t\end{aligned}$$

Die hierdurch entstehenden Töne mit Frequenzen $\alpha - \beta, \ldots$ werden als **Kombinationstöne** bezeichnet.

Observe. *Für verschiedene α, β in der selben Größenordnung kann $\alpha - \beta$ von deutlich anderer Größenordnung sein.*

Bei einem rationalen Intervall wird hierdurch auch der Grundton hörbar (**Rekonstruktion des Grundtones**).

Man kann das ausprobieren (ACHTUNG UNANGENEHM!): http://szhorvat.net/pelican/combination-tones.html

Siehe auch https://en.wikipedia.org/wiki/Beat_(acoustics)#Binaural_beats.

Für das selbe Signal mit verschiedener Lautstärke, $b(t) := \lambda a(t), \lambda < 1$, ändert sich dieser Effekt, bei größerer Lautstärke wird der Kombinationston relativ lauter.

Example 10 (Quinte)**.** Wir betrachten das Intervall aus Tönen mit Frequenz 2α und 3α. Als Kombinationstöne ergeben sich:

- linear: $2\alpha, 3\alpha$
- quadratisch: $4\alpha, \alpha, 5\alpha, 6\alpha$

[3] https://www.youtube.com/watch?v=3d6DsjIBzJ4

- kubisch: $6\alpha, \alpha, 7\alpha, 9\alpha, 4\alpha, 8\alpha$
- ...

Insgesamt ergibt sich der Grundton α mit einem Obertonspektrum.

Example 11 (kl. Septime)**.** Wir betrachten das Intervall aus Tönen mit Frequenz $4\alpha, 7\alpha$

- linear: $4\alpha, 7\alpha$
- quadratisch: $3\alpha, 8\alpha, 11\alpha, 14\alpha$
- kubisch: $1\alpha, 10\alpha, 12\alpha, 15\alpha, 18\alpha, 21\alpha$
- ...

Example 12 (Quarte)**.** Wir betrachten das Intervall aus Tönen mit Frequenz $3\alpha, 4\alpha$

- linear: $3\alpha, 4\alpha$
- quadratisch: $\alpha, 6\alpha, 7\alpha, 8\alpha$

Es ergibt sich eine oktavierte Version des höheren Tones mit Obertonspektrum.

Example 13 (unsaubere Quinte)**.** Wir betrachten das Intervall aus Tönen mit Frequenz $2\alpha, 2.99\alpha$

- linear: $2\alpha, 2.99\alpha$
- quadratisch: $4\alpha, 0.99\alpha, 4.99\alpha, 5.98\alpha$
- kubisch: $1.01\alpha, 3.98\alpha, 6\alpha, 6.99\alpha, 7.98\alpha, 8.97\alpha$

Es ergeben sich Schwebungen wischen den Kombinationstönen.

Es ist unklar, ob die Schwebungen und/oder der sehr tiefe Kombinationston 0.02α dafür sorgt, dass das Intervall als unangenehm wahrgenommen wird.

3 Akkorde

Definition 14 (Akkord)**.** Ein **Akkord** ist eine Menge von mindestens 3 Tönen.

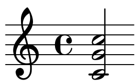
Notation 14.1. Für Töne mit Frequenzen $n \cdot \alpha, m \cdot \alpha, \ldots$ notieren wir im Folgenden $n : m : \ldots$.

Example 15. Der Akkord $2:3:4$ wird als **Powerchord** bezeichnet.

- linear: $2,3,4$
- quadratisch: $1,2,4,5,6,6,7,1,8$

Verglichen mit der Quinte (Example 10) kommen einige Kombinationstöne mehrfach, d.h. lauter, vor.

TODO: Noten cgc



Example 16 (Dur-Akkord)**.** Wir betrachten den Akkord $3:4:5$.

- linear: $3,4,5$
- quadratisch: ...

Die Kombinationstöne ergeben ein Obertonspektrum des mittleren Tones. TODO: Noten cfa

Example 17. Wir betrachten den Akkord $3:4:6$.

TODO: Noten cfc

Example 18. $3:5:6$

TODO: Noten cac

Als Grundton ergibt sich ein f, welches allerdings im Akkord nicht vorkommt.

Example 19 (Dur-Akkord, Grundstellung)**.** $4:5:6$

TODO: Noten fac

Als Grundton ergibt sich ein f.

Example 20. $4:5:7$

TODO: Noten f a es?

Example 21. $4:6:7$

TODO: Noten f c es?

$F^7_{\not 3}$

Example 22. 4 : 5 : 6 : 7

Dur-Septakkord F^7 TODO: Noten f a c es?

Example 23. Der Akkord 5 : 6 : 7 wird als **verminderter Akkord** bezeichnet.

TODO: Noten a c es? $\cancel{F}^7$

Example 24. 5 : 6 : 8 wird als **Neapolitaner** bezeichnet.

TODO: Noten acf

Example 25 (Moll-Akkord)**.** Der Akkord 10 : 12 : 15 wird als **Moll-Akkord** bezeichnet.

TODO: Noten f as c

Als Grundton der Kombinationstöne ergibt sich ein des, der **Gegenklang** zu f.

Example 26 (Großer Dur-Septakkord)**.** 8 : 10 : 12 : 15

TODO: Noten des f as c

$D\flat^{\mathrm{maj7}}$

Example 27 (Moll-Septakkord)**.** 10 : 12 : 15 : 18

TODO: Noten f as c es

Als Grundton der Kombinationstöne ergibt sich ein des. Allerdings ist auch das as relativ stark vorhanden.

Example 28. 4 : 5 : 6 : 7 : 9

TODO: Noten f a c es? g

$F^{7,9}$

> "Wenn wir Jazz machen, packen wir einfach noch ein paar Terzen drauf."

Example 29 (Sixte ajoutée)**.** 10 : 12 : 15 : 17 heißt **Sixte ajoutée**.

TODO: Noten e g h cis

$\cancel{C}^{\mathrm{maj7},>8}$

12 : 17 ist ein Tritonus (etwas größer als $\sqrt{2}$).

Mit Oktavreduktion[a] lässt sich der Akkord umschreiben zu

TODO: Noten cis e g h ($5:6:7:9$, $\cancel{A}^{7,9}$, kein Sixte ajoutée)

[a] Es handelt sich nicht wirklich um Oktavreduktion, das Verhältnis ändert sich. ($10:12:15:17 \neq 6:7:9:10 (\cancel{A}^{7,9}/E)$)

Question 29.1. Ist Oktavreduktion überhaupt sinnvoll?

Exkurs: Kirchenglocken Es ist Sonntag, daher läuten gerade Kirchenglocken. Hier kann man den **Dopplereffekt** hören.

Remark 29.2. Unsere Sichtweise ist stark geprägt von Akkorden. Wenn man Melodien intoniert, so kommt man teilweise zu gegensätzlichen Ergebnissen. Auf der Geige wird beispielsweise ein $g\sharp$ oft höher gespielt als ein $a\flat$. Siehe auch "How equal temperament ruined harmony" S. 47 und 78.

Remark 29.3. Nach Leopold Mozart teilt sich der Ganzton in eine großen und einen kleinen Halbton, welche im Verhältnis 5 : 4 stehen. Im Wesentlichen beschreibt das EDO53.

TODO: c-Dur Tonleiter mit reinen Dur-Akkorden

Tabelle 4: C-Dur Tonleiter mit reinen Dur-Akkorden

Ton	c		d		e		f		g		a		h		c
Verhältnis	$\frac{1}{1}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{5}{4}$		$\frac{4}{3}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{5}{3}$		$\frac{15}{8}$		$\frac{2}{1}$
Schritt		$\frac{9}{8}$		$\frac{10}{9}$		$\frac{16}{15}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{10}{9}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{16}{15}$	

Bei Einteilung eines Ganztons ist großen und kleinen Halbton ergeben sich als Schritte $9+8+5+9+8+9+5=53$.

EDO12 Tonleiter vs Tonleiter mit reinen Akkorden ausprobieren

Notation 29.4 (Notation für 5-limit-tuning)**.** Töne werden immer pythagoräisch notiert. Mit einem , oder ' wird eine Verschiebung nach unten oder oben notiert.

Tabelle 4 wird so als $c\ d\ e,\ f\ g\ a,\ h,\ c$ notiert.

Aufgabe 2, Stück in EDO53

Definition 30. **leittönig** := keine großen Halbtonschritte

Buchempfehlung: "A Geometry of Music" - Dmitri Tymoczko

4 Modulationen

Tabelle 5: Intervalle in EDO53

Intervall	EDO53	rein	EDO12
kl. Sekunde	3, 4, 5	$\frac{25}{24}$, ?, $\frac{16}{15}$	
große Sekunde	8, 9	$\frac{10}{9}, \frac{9}{8}$	$\checkmark(\frac{9}{8}),\ -4ct$
kleine Terz	13, 14	$\frac{32}{17}, \frac{6}{5}$	$(\checkmark)(\frac{32}{27}),\ +6ct.$
große Terz	17, 18	$\frac{5}{4}, \frac{81}{64}$	$(\checkmark)(\frac{81}{64}),\ -8ct.$
Quarte	22	$\frac{4}{3}$	$\checkmark,\ +2ct.$
Tritonus	26, 27	$\sqrt{2} \approx \frac{7}{5}, \frac{10}{7}, \frac{17}{2}$	
Quinte	31	$\frac{3}{2}$	$\checkmark,\ -2ct.$
kl. Sexte	35, 36	$\frac{128}{81}, \frac{8}{5}$	
gr. Sexte	39, 40	$\frac{5}{3}, \frac{27}{16}$	$(\checkmark)(\frac{27}{16}),\ -6ct.$
kl. Septime	43, 44, 45	$\frac{7}{4}, \frac{16}{9}, \frac{9}{5}$	$\checkmark(\frac{16}{9}) + 4ct.$

Definition 31 (Tonvorrat)**.** Ein **Tonvorrat** ist eine Menge von n Tönen pro Oktave, welche ungefähr gleichmäßig verteilt sind.

Definition 32. Wir definieren eine Metrik auf der Menge der Tonvorräte, wobei $\operatorname{dist}(T, T')$ die minimale Anzahl an Halbtonschritten sei, die geändert werden müssen, um von T zu T' zu gelangen.

Definition 33. Eine **Modulation** ist ein Wechsel c$\sharp$ Tonvorrates, der nicht auf komplett absurde Weise geschieht. ("lokal sinnvoll", einzelne Töne werden minimal verändert)

Tonvorräte:

In Tabelle überführen

- $n = 2$:
  - 6,6 (Halbtonschritte EDO12) z.B. $C, F\sharp$
  - $7, 5$ z.B. C, G mögl. Modulation $C, G \to C, G\flat(6, 6) \to D\flat, G\flat(5, 7)$
  - $8, 4$
- $n = 3$
  - $4, 4, 4$ z.B. $C, E, G\sharp$
  - $4, 3, 5$ z.B. C, E, G (**Dur**)
  - $3, 4, 5$ z.B. $C, E\flat, G$ (**Moll**)

  Mögl. Modulationen: $C, E, G \to C, E\flat, G(3, 4, 5)$, $C, E, G \to B, E, G(3, 4, 5)$, $C, E, G \to C, E, G\sharp(4, 4, 4)$ Insbesondere kommt man von $C, E\flat, G$ über C, E, G nach B, E, G (Verschiebung um ein Terz)
- $n = 4$
  - $3, 3, 3, 3$ z.B. $C, E\flat, G\flat, A$

- $3, 3, 2, 4$ $C, E\flat, G\flat, A\flat$ $(A\flat^7)$
- $2, 3, 3, 4$ $C, D, F, A\flat$ (f^6)
- $3, 2, 3, 4$ $C, E\flat, F, A\flat$ (f^7)

Mögl. Modulationen:

$A\flat, C, E\flat, G\flat \to A\flat, C, E\flat F(4, 3, 2, 3)$

$A\flat, C, E\flat, G\flat \to A\flat, C\flat, E\flat, G\flat(3, 4, 3, 2)$

Insbesondere kommt man von $A\flat, C, E\flat, F$ nach $A\flat, C\flat, E\flat, G\flat$ (Verschiebung um eine kleine Terz).

Modulationen mit zwei Änderungen:

$A, C, D, G\flat = F\sharp$ (D^7)

$A, B, E\flat = D\sharp, G\flat = F\sharp$ (B^7)

$A, C, E\flat, F$ (F^7)

Die Modulation von D^7 nach $A\flat^7$ wird als **tritone substitution** bezeichnet.

- $n = 5$
  - $3, 2, 2, 3, 2$ (Pentatonik)
- $n = 6$
  - $2, 2, 2, 2, 2, 2$ (Ganztonleiter)
- $n = 7$
  - $2, 2, 1, 2, 2, 2, 1$

  Je nach Wahl des Grundtones ergibt sich Dur oder Moll. Je früher die Halbtonschritte kommen, desto dunkler ist die Tonart.

  Modulationen verschieben um eine Quinte $\rightsquigarrow$ **Quintenzirkel**

  "Im Prinzip ist Game of Thrones ein großes Jazz Stück" - Man erwartet gewisse Dinge, die manchmal eintreten und manchmal nicht.

4.1 Stabilität von Akkorden

Definition 34. Ein Akkord heißt **stabil** wenn keine Auflösung erwartet wird. (Wir könnten das Stück auf diesem Akkord beenden)

Leitton (Auflösung kl. Halbton nach oben)

In Tabelle überführen

c g b d $\frac{8}{3}, 4, 5, 6$ bzw. $8, 12, 15, 18$. Die Erinnerung an den Grundton c macht den Akkord instabil.

5 Appendix

```
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt
from scipy.fft import fft, ifft
from IPython.display import Audio, display
from scipy.io import wavfile
from ipywidgets import widgets
from functools import partial
import pandas as pd
from fractions import Fraction

def create_signal(frequency, amplitude, delay, phase=0, sampling
    =44100, seconds=1.0):
  timesteps = np.linspace(0,seconds, int(seconds * sampling))
  # return np.sum(amplitude * np.sin(frequency * 2*np.pi * (
      timesteps[:, np.newaxis]-delay)*(timesteps[:, np.newaxis]-
      delay > 0)), axis=1), timesteps
  return np.sum(amplitude * triangle(frequency, (timesteps[:, np.
      newaxis]-delay)*(timesteps[:, np.newaxis]-delay > 0)), axis
      =1), timesteps

def create_waves(frequency, amplitude, phase=0, sampling=44100,
    seconds=1.0):
  timesteps = np.linspace(0,seconds, int(seconds * sampling))
  # return amplitude * np.sin(frequency * 2*np.pi * timesteps[:,
      np.newaxis]), timesteps
  return amplitude * triangle(frequency, timesteps[:, np.newaxis
      ]), timesteps

def triangle(frequency, t):
  phase = (t * frequency + 0.25) % 1 - 0.25
  return (phase <= 0.25) * phase + (phase > 0.25) * (0.5 - phase)

def nonlinearity(x, param=1.0): # param for scaling of argument;
    higher values = more nonlinearity
  #return np.exp(x*param)
  return np.sign(x)*np.log(1+np.abs(x*param))

def myAudio(signal, rate=44100, autoplay=False, time_fade=0.2):
  length = signal.shape[0]
  print(length)
  fade = np.minimum(np.ones(length),np.arange(length)/(time_fade
      * rate))
  return Audio(signal * fade * fade[::-1],rate=rate,autoplay=
      autoplay)
```

```
#frequency = np.array([100., 200., 300, 400])

#frequency_edo12 = 220 * 2**(np.array([5,8,12,14])/12)
#frequency_edo53 = 220 * 2**(np.array([22,36,53,62])/53)
#frequency_edo53 = 220 * 2**(np.array([22,34,53,61])/53)
#frequency_rein1 = 220 * 4/3 * np.array([1, 7/6, 9/6, 10/6])
#frequency_rein2 = 220 * 4/3 * np.array([1, 12/10, 15/10, 17/10])
dursept_edo12 = 220 * 2**(np.array([5,9,12,15])/12) # Durseptakkord in EDO12
dursept_edo53 = 220 * 2**(np.array([22,39,53,65])/53) # Dursept in EDO53
dursept_rein = 220 * 4/3 * np.array([1, 5/4, 6/4, 7/4]) # Dursept rein
mollsept_edo12 = 220 * 2**(np.array([5,8,12,14])/12) # Mollseptakkord in EDO12
mollsept_edo53 = 220 * 2**(np.array([22,36,53,63])/53) # Mollseptakkord in EDO53
mollsept_rein = 220 * 4/3 * np.array([1, 12/10, 15/10, 17/10]) # Mollsept rein
doppeltritone_rein = 220 * 4/3 * np.array([1, 12/10, 14/10, 17/10]) # doppeltritone rein
doppeltritone_edo53 = 220 * 2**(np.array([22,36,48,63])/53) # doppeltritone in EDO53

amplitude = np.array([1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0])
delay = np.array([0.0,0.2,0.4,0.6,0.8,1.0,1.2])

# list of chords to display.
# chords = [dursept_edo12, dursept_edo53, dursept_rein, ]
# chords = [mollsept_edo12, mollsept_edo53, mollsept_rein, ]
chords = [doppeltritone_rein, doppeltritone_edo53, ]

to_display = []
for chord in chords:
    notes = len(chord)
    signal, timesteps = create_signal(frequency=chord, amplitude=amplitude[:notes], delay=delay[:notes], phase=0, sampling=44100, seconds=5.0)
    to_display.append(signal)

max_play_time = 2.0
for signal in to_display:
    display(myAudio(signal[timesteps < max_play_time],rate=44100, autoplay=False))
```

```
plot_time = 1.0

plt.figure(1, figsize=(20,6))
plt.xlabel("time [s]")
for signal in to_display:
    plt.plot(timesteps[timesteps < plot_time], (1*signal[timesteps
         < plot_time]))

plt.figure(2, figsize=(40,6))
plt.subplot(111, xscale='log', yscale='log')
plt.xlabel("Frequenz [Hz]")
plt.xlim(200,5000)
plt.ylim(bottom=1e-1, top=1e4)
for signal in to_display:
    plt.plot(np.abs(fft(nonlinearity(signal[timesteps > 1.0], 0.1)
        )))
```

Stichwortverzeichnis